**基于神经网络的期权定价和隐含波动率计算**

摘要：本文提出了一种数据驱动的方法，利用人工神经网络(ANN) 加速相应的数值方法从而评估金融期权和计算隐含波动率。该方法利用人工神经网络作为通用函数逼近器，在复杂金融模型生成的数据集上训练优化的人工神经网络，并将训练好的人工神经网络作为原始求解器的代理快速高效地运行。我们在三种不同类型的求解器上测试了该方法，包括Black-Scholes方程的解析解、Heston随机波动率模型的COS方法和计算隐含波动率的Brent迭代求根方法。数值结果表明，神经网络求解器可以显著减少计算时间。

关键词：机器学习；神经网络；计算金融；期权定价；隐含波动率；GPU；Black-Scholes；Heston

# 1.引言

在计算金融学中，数值方法是金融衍生品估值的常用方法，也是现代风险管理的常用方法。一般来说，先进的金融资产模型能够捕捉到金融市场中观察到的非线性特征。然而，这些资产价格模型通常是多维的，因此，不会产生期权价值的封闭解。

因此，人们发展了不同的数值方法来求解相应的期权定价偏微分方程(PDE)问题，如有限差分法、傅立叶方法和蒙特卡罗模拟。在金融衍生品定价的背景下，有一个阶段需要根据市场数据对资产模型进行校准。换句话说，资产价格模型中的开放参数需要拟合。这通常不是通过历史资产价格来实现的，而是通过期权价格来实现的，即在所谓的风险中性概率度量下，将交易量大的期权的市场价格与数学模型中的期权价格进行匹配。在模型校准时，为了拟合这些资产参数，需要确定数千个期权价格。然而，由于对高效计算的要求，一些高质量的资产模型无法使用。有效的数值计算在金融风险管理中也越来越重要，特别是当我们处理实时风险管理(例如，高频交易)或交易对手信用风险问题时，这些在效率和准确性之间的权衡似乎往往是不可避免的。

具有多个隐含层的人工神经网络(ANN)已经成为从大数据集中提取特征和检测模式的成功机器学习方法。对于特定的任务，有不同的神经网络变体，例如，用于图像识别的卷积神经网络和用于时间序列分析的递归神经网络。众所周知，人工神经网络可以逼近非线性函数[1] [2][3]，因此可以用来逼近偏微分方程的解[4] [5]。数据科学的最新进展表明，使用深度学习技术，即使是高度非线性的多维函数也可以精确表示[6]。从本质上讲，人工神经网络可以用作强大的通用函数逼近器，而不需要假设输入变量和输出变量之间的函数关系的任何数学形式。此外，人工神经网络很容易实现并行处理，以加快评估速度，特别是在GPU上。

我们的目标是利用经典的人工神经网络，通过学习期权定价方法的结果来加快期权的估值。从计算的角度来看，人工神经网络不会受到偏微分方程的维数的太大影响。“人工神经网络解算器”通常被分解为两个独立的阶段，即训练阶段和测试(或预测)阶段。在训练阶段，人工神经网络通过复杂模型和相应的数值求解器生成的数据集“学习”PDE求解器。这一阶段通常很耗时，但也可以离线完成。在测试阶段，可以使用训练好的模型在线逼近解。ANN解决方案通常可以计算为一组矩阵乘法，可以并行高效地实现，特别是使用GPU。因此，训练好的人工神经网络可以有效地提供金融衍生品价格或其他数，并且可以减少精确期权定价的在线时间，特别是对于涉及资产价格的模型。我们将在本文中展示这种数据驱动的方法是非常有前途的。

本文提出的方法试图在统一的数据驱动的人工神经网络框架下加速欧式期权的定价。人工神经网络用于期权定价已经有几十年的历史了。基本上有两个方向。一种是基于观察到的市场期权价格和标的资产价值，已经应用基于神经网络的回归技术来拟合无模型的非参数定价函数，例如参见[7]、[8]、[9]、[10]。此外，[11]、[12]的作者设计了特殊的核函数，以便在预测期权价格时将先验金融知识融入神经网络。

另一个方向是通过人工神经网络提高模型定价的性能。通过人工神经网络加速经典偏微分方程解算器的兴趣正在迅速增长。文献[13]、[14]、[15]利用强化学习来加速求解高维随机微分方程。文[16]的作者提出了一种优化算法，即所谓的连续时间随机梯度下降算法，并结合深度神经网络对高维美式期权进行定价。在[17]中，通过处理定价误差的系统性偏差的非参数学习方法来提高金融模型的定价性能。当然，这一趋势不仅发生在计算金融领域，而且还发生在PDE发挥关键作用的其他工程领域，如计算流体力学，参见[18]、[19]、[5]、[20]。本文的工作就属于这一方向。在这里，我们使用传统的求解器来生成人工数据，然后训练神经网络来学习不同问题参数的解。与[4]或[5]相比，我们的数据驱动方法发现，除了期权定价偏微分方程的解之外，变量与特定参数(即隐含波动率)之间的隐含关系。

本文组织如下。第二节简要介绍了Black-Scholes和Heston随机波动率偏微分方程两种基本期权定价模型。除了欧式期权定价外，我们还分析了用于计算所谓隐含波动率的寻根方法的稳健性问题。在第三节中，介绍了所采用的人工神经网络，并给出了合适的超参数。在训练人工神经网络学习不同问题参数的金融模型的结果之后，第四节给出了带有相应误差的数值人工神经网络结果。

# 2、期权定价与资产模型

在这一部分中，简要介绍了两种资产模型，几何布朗运动(GBM)资产模型和Heston随机波动率资产模型。几何布朗运动(GBM)资产模型产生了Black-Scholes期权定价偏微分方程，Heston随机波动率资产模型产生了Heston偏微分方程。我们还讨论了隐含波动率的概念。我们将以欧式期权合约为例，不过，其他类型的期权也可以用类似的方式加以考虑。

2.1 BS偏微分方程

第一个资产价格模型是GBM，

,

其中是非分红资产的价格，是维纳过程，是时间，是漂移参数，是方差参数。波动率参数为。标的股票价格的欧式期权合约可以通过Black-Scholes PDE来估值，这种PDE可以从复制投资组合方法下的itôs引理推导出来，也可以通过鞅方法得到。用表示期权价格，Black-Scholes方程为

,

随着时间t直到到期T，r为无风险利率。偏微分方程伴随着一个代表特定收益的最终条件，例如，在时间T的欧洲看涨期权的收益，

,

其中，K是期权的执行价格。有关金融数学基础知识的更多信息，请参见标准教科书。

(2)、(3)的解析解适用于欧式期权，即，

(3)

是股票价值S在时间t的欧式看涨期权价值，代表正态分布。该求解过程用表示。

2.1.1.隐含波动率

2.2 Heston模型

使用BS模型的一个限制公式中的恒定波动率的假设。通过将波动性/方差建模为一个扩散过程，对资产定价中的恒定波动性假设进行了一个主要的建模步骤。由此产生的模型是随机波动模型。将波动性建模为随机变量的想法得到了实际财务数据的证实，这些数据表明了股价波动性的可变和不可预测性。认为波动率是随机的最重要的论点是隐含波动率微笑/偏斜，它存在于金融市场数据中，可以通过SV模型准确恢复，特别是对于到到期日T的中长期期权。通过与资产价格过程相关的附加随机过程，我们处理一个SDE系统，对于该系统，期权估价比标量资产价格过程更昂贵。最流行的随机波动率模型是Heston模型[22]，其中风险中性测度下的随机方程组为:



其中，标的期权价格*St*由(3.2.1)式决定，*vt*为标的价格瞬时方差，满足(3.2.2)式所示的CIR过程。*WS*和*Wv*为两个布朗运动，考虑资产价格和资产波动率的相关性，设为布朗运动*WS*和*Wv*的相关系数，由维纳过程性质可知：

. 

第二个方程对方差的均值回复过程进行建模，参数为无风险利率，为长期方差，κ为回复速度；γ是方差的波动率，决定了的波动率。还有一个附加参数，即方差的t0值。

通过鞅方法，我们得到以下多维Heston期权定价偏微分方程，

通过改变上述参数，可以再现市场中典型观察到的隐含波动率形状，例如微笑或偏斜。一般来说，参数影响资产收益分布的峰度，系数控制其不对称性。Heston模型没有解析解，因此用数值方法求解。

期权定价的数值方法一般分为三类，有限差分法、蒙特卡罗模拟法和数值积分法。偏微分方程问题的有限差分通常用于自由边界问题，因为它们发生在评估美式期权时，或者用于某些奇异期权，如障碍期权。期权价格的导数(所谓的希腊期权)是用有限差分精确计算的。

蒙特卡罗模拟和数值积分依赖于Feyman-Kac定理，该定理本质上指出，在风险中性度量下，(欧式)期权值可以写成期权在最终时间T的支付函数的贴现期望值。在这种情况下，蒙特卡罗方法通常用于评估路径依赖的高维期权，也用于计算现代风险管理中的各种评估调整。然而，蒙特卡罗方法通常收敛有点慢，特别是在模型校准的情况下，这可能是一个问题。

数值积分方法也基于Feyman-Kac定理。使用它们的优选方式是首先变换到傅立叶域。资产价格特征函数的可得性是使用傅立叶技术的先决条件。在这种情况下，有效的技术之一是COS方法[23]，该方法利用傅立叶-余弦级数展开来近似资产价格的概率密度函数，但基于特征函数。COS方法可以高效地用于计算Heston模型下的欧式期权价值。然而，对于许多不同的现代资产模型，特征函数通常是不可得的。在Heston-ANN的过程中，我们将使用Heston模型和COS方法，因此训练时间仍然相对较短。

2.3 隐含波动率得数值方法

针对隐含波动率，有几种迭代数值技术来求解(6)，例如牛顿-拉夫森法、二等分法或布伦特法。牛顿-拉夫森迭代是这样写的，

从最初的猜测开始，，近似解，，反复改进，直到满足某个标准。BS期权价值相对于波动率的一阶导数，在(9)的分母中被命名为期权的V ega，可以通过对欧洲期权的分析得到。

上述方程中各参数表示如下：

*rt*为无风险收益率，这里*rt*为常数。

*θ*是长期方差，或长期平均价格方差(长期波动率的期望)，且当*t*趋于无穷大时，*vt*的期望值趋于*θ*。

是恢复*vt*为的速率，称为均值回归系数(它是的调整系数)。

为是波动过程的波动性，即波动率的方差(它决定了*vt*的方差)。

所有参数，即均与时间相关且地位相同，且其中严格为正.换句话说，Heston 随机波动率模型假设方差是一个随机过程，且表现出向长期均值回归的趋势，其方差水平的平方根成比例的波动性，并且其随机性的来源与基础价格过程的随机性是相关的(相关系数为)。

Heston没有直接求解方程，而是假设该模型有和Black-Scholes模型近似的解：

, 

 (5)

其中*P*1，*P*2为两个概率分布函数，*St*当天标的资产收盘价，*vt*为标的资产价格的波动率，满足均值回复平方根过程（也称CIR过程），*K*为期权执行价，*r*为无风险利率。

对欧式看涨期权定价公式进行测度变换，并通过对其特征函数作傅里叶变换后得到*P*1，*P*2：

 (6)

其中，为被积函数实部，*i*为虚数单位，且满足：

 (7)

上式中，

 (8)

 (9)

 (10)

 (11)



综上可以得到Heston模型的欧式看涨期权定价公式如下：

 (12)

其中，*P*1，*P*2满足(6)式。

对于看跌期权的价格*Pt*，由欧式看涨与看跌期权之间的平价关系可得：

 (13)

最后推得欧式看跌期权定价公式：

. (14)